

B.A. 1st Semester Examination,**November–2014****MATHS-I****Paper-BM-111****Algebra***Time allowed : 3 hours]**[Maximum marks : 27]*

Note : Attempt **five** questions in all, selecting **one** question from each section. **Section-V is compulsory.** Each question for **Section-I, II** are of $5\frac{1}{2}$ marks, **Section-III, IV** are of 5 marks and each part of **Section-V** is of 1 mark.

नोट : प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्न कीजिए। खण्ड-V अनिवार्य है। खण्ड-I, II के प्रत्येक प्रश्न $5\frac{1}{2}$ अंकों के, खण्ड-III, IV के पाँच अंकों के तथा खण्ड-V का प्रत्येक भाग 1 अंक का है।

Section-I**खण्ड-I**

1. (a) Show that every matrix can be expressed in one and only one way as the sum of a symmetric and skew symmetric matrices.

दिखाइये कि प्रत्येक आधात्री को एक तथा केवल एक तरीके से अर्थात् किसी सममित तथा विषम सममित आधात्रियों के योगफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

(2)

91225

- (b) Express $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ as the product of elementary matrices.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ को प्राथमिक आधात्रियों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए।

2. (a) Find the eigen vectors of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

आधात्री $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ के आइजेन सदिशों को ज्ञात कीजिए।

- (b) State and prove Cayley-Hamilton theorem.
केले-हैमिल्टन प्रमेय को बताइए तथा सिद्ध कीजिए।

Section-II

खण्ड-II

3. (a) For what values of a and b, the system of the equations
 $x + y + z = 6, x + 2y + 3z = 10, x + 2y + az = b$
have
(i) no solution

91225

(ii) infinitely many solution

(iii) unique solution.

a तथा b के किन मानों के लिए, समीकरणों के निकाय

$$x + y + z = 6, x + 2y + 3z = 10, x + 2y + az = b$$

का

(i) कोई हल नहीं है

(ii) अनंत रूप से बहुत सारे हल हैं

(iii) अद्वितीय हल है।

(b) Find the value of k such that the system of equations

$$x + ky + 3z = 0, 4x + 3y + kz = 0, 2x + y + 2z = 0 \text{ has a non-trivial solution.}$$

k का मान इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि समीकरणों के निकाय

$$x + ky + 3z = 0, 4x + 3y + kz = 0, 2x + y + 2z = 0$$

का एक गैर-नगण्य हल है।

4. (a) If A is a real skew-symmetric matrix such that $A^2 + I = 0$, show that A is orthogonal and is of even order.

यदि A एक वास्तविक विषम-सममित आधात्री है इस प्रकार से कि $A^2 + I = 0$, दिखाइए कि A लम्बकोणीय है तथा समान क्रम का है।

(4)

91225

(b) Diagonalize the quadratic form

$$4x^2 + 10y^2 + 11z^2 - 4xy + 12zx - 12yz$$

द्विपर्दीय रूप

$$4x^2 + 10y^2 + 11z^2 - 4xy + 12zx - 12yz$$

को विकर्णाकृत कीजिए।

Section-III**खण्ड-III**

5. (a) Solve the equation :

$$4x^4 + 8x^3 + 13x^2 + 2x + 3 = 0,$$

its being given that the sum of two of its roots
is zero.

$$\text{समीकरण } 4x^4 + 8x^3 + 13x^2 + 2x + 3 = 0,$$

को हल कीजिए, यह दिया गया है कि इसके दो मूलों का योगफल
शून्य है।

(b) Solve the equation :

$$x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8 = 0$$

which has a multiple roots.

$$\text{समीकरण } x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8 = 0$$

को हल कीजिए जिसके बहुविध मूल हैं।

91225

6. (a) Solve the equation :

$$40x^4 - 22x^3 - 21x^2 + 2x + 1 = 0,$$

roots being in H. P.

$$\text{समीकरण } 40x^4 - 22x^3 - 21x^2 + 2x + 1 = 0,$$

को हल कीजिए, मूल H. P. में हों।

- (b) If α, β, γ are the roots of the equation

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0;$$

from an equation whose roots are

$$\frac{\beta + \gamma}{\alpha}, \frac{\gamma + \alpha}{\beta}, \frac{\alpha + \beta}{\gamma}$$

यदि α, β, γ समीकरण

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0;$$

के मूल हैं; एक समीकरण बनाइए जिसके मूल

$$\frac{\beta + \gamma}{\alpha}, \frac{\gamma + \alpha}{\beta}, \frac{\alpha + \beta}{\gamma} \text{ हैं।}$$

Section-IV

खण्ड-IV

7. (a) Solve the equation :

$$x^3 - 3x^2 + 12x + 16 = 0 \text{ by Cardan's method}$$

कार्डान की विधि द्वारा समीकरण

$$x^3 - 3x^2 + 12x + 16 = 0 \text{ को हल कीजिए।}$$

(b) Solve the equation :

$$x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 10x - 3 = 0,$$

by Descarte's method.

देकार्ते की विधि द्वारा समीकरण

$$x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 10x - 3 = 0,$$

को हल कीजिए।

8. (a) Solve the equation :

$$x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 24x + 15 = 0,$$

by Ferrari's method

फेरारी की विधि द्वारा समीकरण

$$x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 24x + 15 = 0,$$

को हल कीजिए।

(b) Show that the equation :

$$x^7 + x^4 + 8x + k = 0$$

has at least 4 imaginary roots for all values of k.

दिखाइए कि समीकरण $x^7 + x^4 + 8x + k = 0$ के k

के सभी मानों के लिए कम से कम 4 काल्पनिक मूल हैं।

Section-V**खण्ड-V**

9. (a) If A is any square matrix, prove that $A^T + A$ is symmetric matrix.

यदि A कोई वर्ग आधारी है, सिद्ध कीजिए कि $A^T + A$ सममित आधारी है।

- (b) Define Linear independent

रैखिक स्वतंत्र को परिभाषित कीजिए

- (c) If α is an eigen value of a non-singular matrix A,
prove that the eigen values of adj A are $\frac{|A|}{\alpha}$

यदि α एक गैर एकल आधारी का एक आइजेन मान है, सिद्ध कीजिए कि adj A के आइजेन मान $\frac{|A|}{\alpha}$ हैं।

- (d) If α, β, γ are the roots of the equation

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0;$$

$$\text{then find } \sum \left(\frac{1}{\alpha} + \beta\gamma \right)$$

यदि α, β, γ समीकरण

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0;$$

$$\text{के मूल हैं; तब } \sum \left(\frac{1}{\alpha} + \beta\gamma \right) \text{ ज्ञात कीजिए।}$$

- (e) Solve the equation $4x^3 + 16x^2 - 9x - 36 = 0$, the sum of two roots being zero.

समीकरण $4x^3 + 16x^2 - 9x - 36 = 0$, को हल कीजिए,
दो मूलों का योगफल शून्य है।

- (f) Write Descarte's rule of signs.

चिह्नों के देकार्ते के नियम को लिखिए।